TOP 04

MÉTHODE DE D'ALEMBERT POUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES.

Les fichiers TOP sont réservées aux étudiants qui préparent le Top 5. Ils sont plus difficiles et demandent déjà une bonne maîtrise du reste du programme (cours, exercices, TD et méthodes). Même si le contenu de ces exercices dépasse le cadre du programme de ECG2, ils peuvent inspirer une série de questions d'un texte de concours.

Cet exercice concerne le chapitre 02 (Séries).

Exercice 1.-
La méthode de d'Alembert est une méthode pour étudier la convergence de certaines séries, par comparaison à une série géométrique (un peu comme la méthode du n^2 ou du n^α qui se proposent de comparer le terme général d'une série à une série de Riemann). L'exercice commence par la preuve du théorème de d'Alembert (difficile et abstraite) puis se concentre sur des exemples et des applications (plus faciles).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. **Théorème de d'Alembert**
   - **a.** On suppose que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1.$$
   Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
   - **b.** On suppose que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1.$$
   Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.
   - **c.** Justifier à l'aide d'exemples bien choisis qu'on ne peut pas conclure dans le cas où
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$
   - **d.** À quoi sert l'hypothèse $u_n > 0$?
2. **Applications** À l'aide du résultat précédent, étudier la convergence des séries de termes généraux suivants.
   - **a.** $u_n = \frac{1}{n!}$.
   - **b.** $u_n = \frac{n!}{n^n}$.
   - **c.** $u_n = \frac{n^n n!}{(2n)!}$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Pour que cet exercice soit profitable, il n'est pas recommandé d'utiliser la correction trop tôt. La *recherche* de la solution a beaucoup plus d'intérêt que la solution elle-même.

Correction 1.- **1. a.** C'est une question difficile. On fixe un nombre $\ell' \in]\ell, 1[$ (ce qui est possible car $\ell < 1$). Le résultat de convergence montre en fait qu'il existe un moment n_0 à partir duquel tous les termes de la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sont majorés par ℓ' : pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell'.$$

Soit maintenant $n \geqslant n_0$. On a

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}.$$

Dans le membre de droite, il y a $n - n_0$ fractions de la forme $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ avec $k \geqslant n_0$ donc qui satisfont toutes l'hypothèse $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \ell'$. On obtient donc

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} \leqslant \left(\ell'\right)^{n-n_0}$$

puis

$$u_n \leqslant \left(\ell'\right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

En notant c la constante $c = u_{n_0} \left(\ell'\right)^{-n_0}$, on a

$$u_n \leqslant c \left(\ell'\right)^n.$$

Le théorème de comparaison par majoration des séries à termes positifs (compte tenu du fait que la série de terme général $c\left(\ell'\right)^n$ converge) montre alors que la série de terme général u_n converge.

b. On raisonne de manière similaire. Soit cette fois $\ell' > \ell$. On montre maintenant et de la même manière que, à partir d'un certain rang u_n est minorée par une $c\left(\ell'\right)^n$. Ceci permet, encore avec le critère de comparaison par majoration des séries à termes positifs que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

c. Prenons $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1.$$

Et pourtant, $\sum_{n\to+\infty} u_n$ diverge alors que $\sum_{n\to+\infty} v_n$ converge. Ceci montre bien que tout peut arriver dans le cas où la limite du quotient vaut 1.

d. Il faut que $u_n \geqslant 0$ pour pouvoir appliquer le théorème de comparaison et il faut que $u_n \neq 0$ car on divise par u_n dans le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. a. On a tout de suite $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 0. La question **1.a** s'applique et on conclut à la convergence de la série $\sum_{n\to+\infty} u_n$.

b. On a ici

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}.$$

On a ensuite

$$n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = n\left(\frac{-1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{-n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}(1).$$

On conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -1$$

puis enfin que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1.$$

La question **1.a** montre alors que $\sum_{n\to+\infty} u_n$ converge.

c. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(2n+2)(2n+1)n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2(2n+1)n^n}$$

Nous avons montré à la question précédente que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = e.$$

Par ailleurs

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

On obtient alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{4} < 1.$$

On conclut encore une fois à l'aide de la question **1.a** que $\sum_{n\to+\infty} u_n$ converge.